Energie d'un photon : $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

Quantité de mouvement du photon : $p = \frac{h}{\lambda}$ On notera que pour le photon, E = p c

Energie particule (formule relativiste) : $E_p = \sqrt{m^2c^4 + p_p^2c^2}$ (Au repos : $E = mc^2$)

Quantité de mouvement (relativiste) de la particule : $p_p = \gamma m v$

Conservation de la quantité de mouvement : $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_p}$ Soit : $\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_p}$

On élève au carré : $(\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2})^2 = \overrightarrow{p_p}^2$

$$p_1^2 + p_2^2 - 2\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2} = p_p^2$$

$$p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta = p_p^2 \qquad (1)$$

Conservation de l'énergie : $\frac{hc}{\lambda_1} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda_2} + \sqrt{m^2c^4 + p_p^2c^2}$

$$p_1c + mc^2 = p_2c + \sqrt{m^2c^4 + p_p^2c^2}$$

On isole la racine et on met au carré :

$$m^2c^4 + p_p^2c^2 = (p_1c - p_2c + mc^2)^2$$

$$\cancel{m^2c^4} + p_p^2\cancel{c^2} = (p_1\cancel{c} - p_2\cancel{c})^2 + \cancel{m^2c^4} + 2\,m\cancel{c^2}(p_1c - p_2c)$$

$$p_p^2 = (p_1 - p_2)^2 + 2mc(p_1 - p_2) \qquad (2)$$

On identifie p_p^2 dans (1) et (2) :

$$(p_1 - p_2)^2 + 2mc(p_1 - p_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta$$

$$\cancel{p_1^2 + p_2^2} - \cancel{2}p_1\,p_2 + \cancel{2}mc(p_1 - p_2) = \cancel{p_1^2 + p_2^2} - \cancel{2}p_1p_2\cos\theta$$

$$p_1 - p_2 = \frac{p_1p_2}{mc}(1 - \cos\theta)$$

On remplace les qdm des photons :

$$\frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} = \frac{h^2}{mc\lambda_1\lambda_2}(1 - \cos\theta)$$

On multiplie par $\lambda_1\lambda_2$: $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

On divise par hc :